1.2) <u>Un possibile modello matematico è</u>:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se oggetto } j \text{ scelto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\min \; z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \geq a \qquad (a)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \geq b \qquad (b)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \ldots, n$$

- grandezze: $n, a, b, (c_j), (p_j) \Rightarrow O(n)$

1.1) • $P \in NP$ (albero decisionale binario di n livelli),

• KP01-min $\propto P$ (ponendo $b = 0$), $(\bar{n}, (\bar{c}_j), (\bar{p}_j), \bar{b})$

$$\left.\begin{array}{ll} n := \bar{n} & b := 0 \\ a := \bar{b} & \\ (c_j) := (\bar{c}_j) & j = 1, \ldots, \bar{n} \\ (p_j) := (\bar{p}_j) & j = 1, \ldots, \bar{n} \end{array}\right\} O(\bar{n})$$

• Quindi $P \in NP$-Hard.

1.3.1) $PA \in \mathcal{P}$: porre $x_j = 1$ per $j = 1, \ldots, n$ e verificare (a) e (b).

1.3.2) $PA \in \mathcal{P}$: 1) ordinare gli n oggetti secondo valori non crescenti di p_j, 2) porre $x_j = 1$ per $j = 1, \ldots, b$; $x_j = 0$ per $j = b+1, \ldots, n$, 3) verificare (a) – (tempo $O(n \log n)$).

1.3.3) $PA \in \mathcal{P}$: come per 1.3.2).

1.3.4) • $PA \in NP$ (...)

• Part. Probl. $\propto PA$ (ponendo $b = 0$) ...

• Quindi $PA \in NP$-Hard.

Esercizio 2

Date n "operazioni" ed m "macchine", a ciascuna operazione j (j = 1, …, n) sono associati un "istante iniziale" a_j ed un "istante finale" b_j. Ciascuna macchina e` in grado di eseguire in ogni istante al piu` una operazione e di lavorare complessivamente per un periodo di tempo minore o uguale ad un valore dato C.
Ogni operazione deve essere assegnata ad una ed una sola macchina.

1)- Dimostrare che il problema della determinazione di una soluzione ammissibile e` NP-difficile (si ricordi che il "Partition Problem" e` NP-difficile).

2)- Definire un modello di Programmazione Lineare Intera per il problema nel caso in cui si voglia minimizzare il numero di macchine utilizzate.

$m < n$

senza vincolo su istanti iniziali e finali:

BPP con pesi $p_j = (b_j - a_j)$ $j = 1, \dots, n$

(2)

$n, m, (a_j), (b_j), c$

∘ grandezza: $2n+3 \to O(n)$

$(m < n)$

2a) • $P \in NP$ (albero decisionali di n livelli: 1 per operazione) al massimo m nodi figli (1 per macchina)

$\underline{(PP \text{ con } \bar{c} = \sum_{j=1}^{n} p_j/2) \,\alpha\, P}$: $n := \bar{n}$, $c := \bar{c}$, $a_1 = 0$, $b_1 = p_1$; $a_j = b_{j-1} + 1$, $b_j = a_j + p_j$

$PP(\bar{n}, (p_j), \bar{c})$ per $j = 2, \dots, n$; $m = 2$. PP ammette soluzione se e solo se P ammette soluz.

Grandezza: $\bar{n}$ $O(\bar{n})$

Quindi $P \in NP$-Hard

2b) $y_i = \begin{cases} 1 & \text{se macchina } i \text{ utilizzata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ $\quad i = 1, \dots, m$

$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se operazione } j \text{ eseguita da macchina } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ $\quad i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$

$$\min \; z = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = 1 \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)\, x_{i,j} \le c\, y_i \qquad i = 1, \dots, m$$

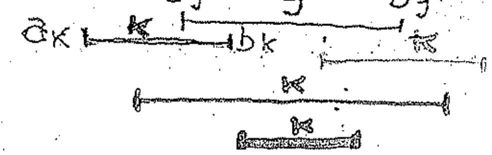
$$x_{i,j} + x_{i,k} \le 1 \qquad i = 1, \dots, m;\; j = 1, \dots, n;\; k \in S_j$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, m;\; j = 1, \dots, n$$

$$y_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, m$$

con:

$S_j := \{k : \text{operazione } k \text{ si sovrappone ad operazione } j\}$ $j = 1, \dots, n$



3.1) Definire la matrice binaria $(a_{i,j})$ con:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se viaggio } j \in V_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \begin{matrix} j = 1, \dots, n \\ i = 1, \dots, m \end{matrix}$$

Variabili decisionali binarie:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se viaggio } j \text{ scelto (cioè } j \in S) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, \dots, n$$

Modello PLI:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (a$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geq 1 \qquad i = 1, \dots, m \quad (b$$

$$\left(\text{oppure} \quad \sum_{j \in V_i} x_j \geq 1 \qquad i = 1, \dots, m \right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_j x_j \geq d \qquad (c$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \dots, n \quad (d$$

- Grandezza $O(mn)$ $(m, n, (c_j), d, (t_j), (V_i))$

3.2) • $P \in NP$ (albero decisionale binario di n livelli),

- KP01-Min α P (ponendo: $m = 1$, $V_1 = \{1, \dots, n\}$),
$(\tilde{n}, \tilde{b}, (\tilde{c}_j), (\tilde{w}_j)) \Rightarrow \tilde{n}$; $n := \tilde{n}$, $d := \tilde{b}$, $(c_j) := (\tilde{c}_j)$; $(t_j) := (\tilde{w}_j)$ $O(n)$
- Quindi $P \in NP$-Hard.

3.3) $PA \in P$: porre $x_j = 1$ per $j = 1, \dots, n$ e verificare (b) e (c).

3.4) • $PA \in NP$
- Part. Probl. α PA (ponendo $m = 1$, $V_1 = \{1, \dots, n\}$) ....
- Quindi $PA \in NP$-Hard

4a)

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se articolo } j \text{ caricato su veicolo } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m$$

$$\max \quad z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_j x_{i,j} \qquad (1)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{m} p_j x_{i,j} \le a_i \qquad i=1,\dots,n \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \le 1 \qquad j=1,\dots,m \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} < K \qquad (4)$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\} \qquad i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m \qquad (5)$$

- grandezza: $n, m, (p_j), (a_i), K \Rightarrow O(m+n) \to O(m)$

4b)
- $P \in NP$ (albero decisionale di m livelli: 1 per articolo
  ($n+1$) nodi figli: 1 per veicolo + art. non caricato
- Subset-Sum $\alpha\, P$: $(n', (w_j), c) \to n'$ $\begin{cases} n := 1,\ m := n',\ p_j := w_j & j=1,\dots,m \\ a_1 := c,\ K := m+1. \end{cases}$ $O(n')$
- Quindi $P \in NP$-Hard

4C.1)
- $PA \in P$: non si inserisce alcun articolo ($O(m)$).
  (soluzione sempre ammissibile)

4C.2)
- $PA \in NP$ (albero decisionale di m livelli: 1 per articolo)
  ($n+1$) nodi figli: 1 per veicolo + art. non caricato
- (PP con $c = \sum_{j=1}^{n'} p_j/2$) $\alpha\, PA$: $m := n'$, $K := m$, $n = 2$, $a_1 := a_2 := c$ $\Big\}\ O(n')$

Se PA è ammissibile : PP è ammissibile
altrimenti : PP non è ammissibile

- Quindi $PA \in NP$-completo

4C.3) come 4C.2

5.1) a) $P \in NP$: albero decisionale di $n-1$ livelli (al max $(n-1)$ nodi figli).

b) ATSP αP: $K = n$: $\{R_i\} = \{i\}$ $i = 1, \dots, n$.

~~(completo con multiplicazione)~~ $O(n)$

- grandezza: n, m (con $m \leq n^2$), (G), K, $(R_\ell) \Rightarrow O(m)$ $O(n^2)$

5.2) Trasformiamo il grafo G in un grafo completo, ponendo $c_{i,j} = \infty$ se arco $(i,j) \notin A$.

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se arco } (i,j) \text{ nel circuito ottimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se vertice } i \text{ nel circuito ottimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} \qquad (a)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = y_i \qquad i = 1, \dots, n \qquad (b)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} x_{j,i} \qquad i = 1, \dots, n \qquad (c)$$

$$\sum_{i \in R_h} y_i \geq 1 \qquad h = 1, \dots, K \qquad (d)$$

in alternativa $\sum_{i \in S} \sum_{j \in V \setminus S} x_{i,j} \geq 1 \quad \forall S : 1 \in S$, almeno un sottoinsieme $R_\ell \subseteq V \setminus S$ $(\ell = 2, \dots, K)$

$$x_{i,j} \in \{0,1\} \quad i,j = 1, \dots, n; \quad y_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, n$$

5.3) al posto di (d): $\sum_{i \in R_h} y_i = 1 \qquad h = 1, \dots, K \qquad (d')$

SEC $\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq V \setminus \{1\}$, $S \neq \emptyset$

6.1)

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se arco } (i,j) \text{ nel circuito ottimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se vertice } i \text{ nel circuito ottimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i=1,\dots,n$$

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} \qquad (a)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = y_i \qquad i=1,\dots,n \quad (b)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} x_{j,i} \qquad i=1,\dots,n \quad (c)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i \geq a \qquad (d)$$

$$* \quad \sum_{i \in R} y_i \geq d \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (e)$$

SEC $$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{i,j} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq V \setminus \{r\},\ S \neq \emptyset \qquad (f)$$

$$y_r = 1 \qquad (g)$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\} \quad i,j=1,\dots,n; \quad y_i \in \{0,1\} \quad i=1,\dots,n$$

con $R := \{ i \in V : p_i < b \}$

6.2) GRANDEZZA: $n, r, a, d, b, (p_i), (c_{ij}) \rightarrow 5+n+n^2 \rightarrow O(n^2)$

a) $P \in NP$: albero decisionale di $n-1$ livelli (al max $(n-1)$ nodi figli)

b1) $ATSP \propto P$: $p_i := 1$ per $i=1,\dots,n$; $r:=1$

$a := n$, $b:=2$, $d := 100\%$ (o 0%)

b2) $(KP\text{-}min) \propto P$:

$KP\text{-}min\ (\bar{n}, (\bar{c}_j), (p_j), \bar{a})$

$n := \bar{n}+1$; $\bar{c}_n := 1$; $c_{ij} := \bar{c}_j$ $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,n$

$p_n := 1$; $b := \bar{a}+1$; $d := 0\%$; $r := n$; $a := \bar{a}+1$

c) quindi P è NP-Hard.

6.3) $P \in \mathcal{P}$:

$O(n)$ 1) $y_i := 1$ per $i \in R$;

$O(k)$ 2) $k := \lfloor |R| / d \rfloor$ (k = massimo numero di vertici nel circuito)

se $k \geq n$ poni $y_i := 1$ per $i \in V \setminus R$, vai a 4);

$O(n \log n)$ 3) ordina i vertici di $V \setminus R$ secondo valori non crescenti dei premi p_i;

$O(n)$ poni $y_i := 1$ per i primi $k - |R|$ vertici di $V \setminus R$

se $y_r = 0$ poni $y_r := 1$ e $y_\ell := 0$ (con ℓ = $(k-|R|)$-esimo vertice di $V \setminus R$).

$O(n)$ 4) Se $\sum_{i=1}^{n} p_i y_i \geq a$ P ammette soluzione (y_i) altrimenti P non ammette soluzione.

$O(n \log n)$

6.4 Minimizzare il numero dei vertici del circuito (l'ordine dei vertici non importa)

1) $\bar{R} := R$, $\bar{S} := V \setminus R$, $(y_i := 0 \;\; i = 1, \dots, n)$, $y_r := 1$; $\bar{p} := p_r$;
<u>if</u> $r \in \bar{R}$ <u>then</u> $\bar{R} := \bar{R} \setminus \{r\}$, $NR := 1$, $NS := 0$
<u>else</u> $\bar{S} := \bar{S} \setminus \{r\}$, $NS := 1$, $NR := 0$;
ordina i vertici di $\bar{R}$ secondo premi non crescenti;
ordina i vertici di $\bar{S}$ secondo premi non crescenti;

2) <u>if</u> $NR < d\,(NR + NS)$ <u>then</u>

3) $i :=$ primo vertice di $\bar{R}$ (se $\bar{R} = \emptyset$ stop)
non esiste soluz. ammiss.
$y_i := 1$, $\bar{R} := \bar{R} \setminus \{i\}$, $\bar{p} := \bar{p} + p_i$,
$NR := NR + 1$, ripeti il passo 2);

4) <u>if</u> $\bar{p} \geq a$ <u>then</u> stop (soluzione (y_i) trovata);
<u>if</u> $NR < d\,(NR + NS + 1)$ <u>or</u> $\bar{S} = \emptyset$ <u>then</u> vai a 3)
<u>else</u> $i :=$ primo vertice di $\bar{S}$,
<u>if</u> $p_i \leq p_h$ (con $h =$ primo vertice di $\bar{R}$) <u>then</u> vai a 3),
$y_i := 1$, $\bar{S} := \bar{S} \setminus \{i\}$, $\bar{p} := \bar{p} + p_i$, $NS := NS + 1$,
ripeti il passo 4).

Complessità computazionale:

Passo 1) : $O(n \log n)$

Passi 2)+3)+4) : globalmente $O(n)$

- $P \in \mathcal{P}$