7.1) PA $\in$ NP-completo • Grandezza: $2m*n + 2m + 2 \Rightarrow O(m*n)$

$n, m, (t_{ij}), (c_{ij}), (a_i), (b_i)$

- PA $\in$ NP: albero decisionale di n livelli (1 per ogni lavoro; al max m nodi figli: 1 per ogni macchina);
- (Ammissibilità di GAP) $\propto$ PA; (A-GAP $\equiv$ PA)
- Quindi PA $\in$ NP-completo.

7.2) Ovvio poiché PA $\in$ NP-completo.

7.3)

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se lavoro } j \text{ assegnato a macchina } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se macchina } i \text{ utilizzata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i=1,\dots,m$$

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}\, x_{i,j} + \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (1)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = 1 \qquad j=1,\dots,n \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{i,j}\, x_{i,j} \le a_i y_i \qquad i=1,\dots,m \qquad (3)$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\} \qquad i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n \qquad (4)$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad i=1,\dots,m \qquad (5)$$

7.4) a) sostituire (3) con:

$$\sum_{j=1}^{n} t_{i,j}\, x_{i,j} \le a_i \cancel{y_i} \qquad i=1,\dots,m \qquad (6)$$

$$x_{i,j} \le y_i \qquad i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n \qquad (7)$$

b) aggiungere: (7)

c) aggiungere: $x_{i,j} = 0$ per $i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n$ con $t_{i,j} > a_i$

$(t_{i,j} = \infty$ se $t_{i,j} > a_i)$

8.1

Un possibile modello matematico è il seguente:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } (i,j) \text{ appartiene ad } H \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n$$

$$z = \max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i=1,\dots,n \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j=1,\dots,n \qquad (3)$$

$$\sum_{i\in R} \sum_{j\in V\setminus R} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall R \subset V \text{ tali che } r \in R \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \leq d \qquad (5)$$

$$\sum_{(i,j)\in S} x_{ij} \geq \sum_{(i,j)\in T} x_{ij} \qquad (6)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n \qquad (7)$$

dove r è un vertice qualsiasi di V

(8.2) • Grandezza:

$$n,\ (p_{ij}),\ (t_{ij}),\ d,\ S,\ T$$
$$1 \quad n^2 \quad n^2 \quad 1 \quad \le n^2 \quad \le n^2 \Rightarrow O(n^2)$$

• $P \in NP$: albero decisionale di $(n-1)$ livelli (uno per ogni arco del circuito) e max $(n-1)$ nodi figli

• $ATSP_{max} \propto P$: $ATSP(\bar{n}, (\bar{p}_{ij}))$ $O(\bar{n}^2)$

$n := \bar{n}$

$p_{ij} := \bar{p}_{ij}$ $\quad i = 1, \dots, \bar{n};\ j = 1, \dots, \bar{n}$

(5) $\begin{cases} t_{ij} := 0 & i = 1, \dots, \bar{n};\ j = 1, \dots, \bar{n} \\ d := 0 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} S := \emptyset \\ T := \emptyset \end{cases}$ $\quad O(\bar{n}^2)$

• P è NP-Difficile

(8.4) • $AP \in NP$: ...

• $HC \propto AP$ $\quad HC(\bar{n}, \bar{A})$ $\quad O(\bar{n}^2)$
$\quad AP(n, S, T)$

$n := \bar{n}$

$S := \emptyset$

$O(\bar{n}^2)$ $T := \{(i,j) : (i,j) \notin \bar{A}\}$

determina se esiste un circuito Hamiltoniano che utilizza solo archi in $\bar{A}$

• AP è NP-Difficile

(8.3) AP è NP-Difficile perchè è una generalizzazione di 8.4

9.1)

Possibile modello di Programmazione Lineare Intera per il problema dato.

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se il deposito } j \text{ viene utilizzato } (j \in S^*) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se il cliente } i \text{ è servito dai depositi di } S^* \\ 0 & 0 \text{ altrimenti} \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, m)$$

(1) $\max \ z = \sum_{i=1}^{m} p_i y_i - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

s.t.

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geq y_i \qquad i = 1, \dots, m$

(3) $\sum_{j=1}^{n} x_j \leq d$; (4) $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq b$

(5) $x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \dots, n$

(6) $y_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, m$

9.2) Grandezza del problema P:

$n, m, b, d, (p_i), (c_j), (a_{ij})$ $4+m+n+m*n$

$O(m*n)$

a) $P \in NP$: albero decisionale di n livelli:
al livello j $(j=1,\dots,n)$ si considera il deposito j e si decide se selezionarlo ($x_j=1$) o non selezionarlo ($x_j=0$): 2 nodi figli

b) SSP-min ("Subset Sum Problem" versione minimo)

$(\bar{n}, \bar{c}, (\bar{w}_j))$ grandezza: $\bar{n}$ $\left\{ \min \ z = \sum_{j=1}^{\bar{n}} \bar{w}_j x_j \quad \text{s.t.} \ \sum_{j=1}^{\bar{n}} \bar{w}_j x_j \geq \bar{c}, \quad x_j \in \{0,1\} \ j=1,\dots,\bar{n} \right.$

SSP-min α P:

$$\left. \begin{array}{l} n := \bar{n};\ m := 1;\ b := \bar{c};\ d := n; \\ p_1 := 0;\ c_j := \bar{w}_j \ (j=1,\dots,n); \\ a_{1j} := 1 \ (j=1,\dots,n). \end{array} \right\} O(n)$$

- Per qualsiasi valore di y_1 (0 o 1) il vincolo (2) è verificato ($p_1 = 0$: f.o. $y_1 = 0$ o 1)
- Il vincolo (3) è sempre verificato
- La funzione obiettivo diventa $\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ con i vincoli (4) e (5) (si ha SSP-min)
- la soluzione ottima di P (x_j^*) è la soluzione ottima di SSP-min

9.3) <u>Problema polinomiale</u>:

- in (2) conviene avere $y_i = 0$ $(i = 1, \dots, m) \Rightarrow$ (2) soddisfatti;
- ordina gli n depositi secondo valori <u>non crescenti</u> dei costi c_j; ($O(n \log n)$)
- se la "somma dei costi dei primi d depositi $\geq b$" esiste soluzione ammissibile ($x_j := 1$ $j = 1, \dots, d$; $x_j := 0$ $j = d+1, \dots, n$); ($O(n)$)
- altrimenti non esistono soluzioni ammissibili.

9.4a) Come domanda 3)

9.4b) <u>PA è NP-difficile</u>

a) $PA \in NP$ (vedi domanda 2))

b) PP (Partition Problem: $(\bar{n}, (\bar{w}_j), \bar{c})$

grandezza: $\bar{n}$

<u>$PP \propto PA$</u>:

$$\left.\begin{array}{l} n := \bar{n};\ m := 1;\ b := \bar{c};\ d := n; \\ c_j := \bar{w}_j \ (j = 1, \dots, n) \\ a_{1j} := 1 \ (j = 1, \dots, n) \end{array}\right\} O(n)$$

(2) sempre soddisfatto ($y_1 = 0$)

- Se PA ammette soluzione (x^*_j) "questa è anche soluzione ammissibile di PP
- Altrimenti PP non ha soluzioni ammissibili.

1 10.1

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se arco } (i,j) \text{ nel circuito ottimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se vertice } i \text{ nel circuito ottimo} \\ 0 & \end{cases} \qquad i=1,\dots,n$$

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \qquad (1)$$

s.t.

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \qquad i=1,\dots,n \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ji} \qquad i=1,\dots,n \quad (3)$$

$$y_h = 1 \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq c \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \leq d \qquad (6)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad \forall S \subseteq V \setminus \{h\},\ S \neq \emptyset \quad (7)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n \quad (8)$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad i=1,\dots,n \quad (9)$$

4 10.4

$$\max z = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i y_i - \underline{\beta V}$$

s.t.

$$t_{ij} x_{ij} \leq V \qquad i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n$$

$$(2) - (9)$$

• GRANDEZZA: $n, h, z, d, (t_{ij}), (a_i) \to 4 + n^2 + n \to O(n^2)$

(2) a) $P \in NP$: albero decisionale di $(n-1)$ livelli
(cammino elementare dal vertice
h agli altri vertici);
ogni nodo genera al massimo $(n-1)$
nodi figli.

(10.2)

b) $KP \propto P$: $P(n, h, z, d, (t_{ij}), (a_i))$

$KP(\bar{n}, \bar{c}, (\bar{w}_i), (\bar{p}_i))$

dato KP, in tempo $O(n^2)$ si ottiene l'istanza di P:

$n := \bar{n} + 1$,
$\bar{w}_n := 1$, $\bar{p}_n := 1$
$t_{ij} := \bar{w}_i$ $\quad i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n$
$a_i := \bar{p}_i$ $\quad i = 1, \ldots, n$
$d := \bar{c} + 1$ $\quad O(n^2)$
$z := n$
$h := n$

la soluzione ottima (y_i) di P coincide con la
soluzione ottima di KP $(z(KP) := z(P) - \bar{w}_n)$
y_i con $i = 1, \ldots, \bar{n}$

(10.3)

(3) A-P $\in$ P:
• ~~circuito che parte da h e ritorna ad h con tempo minimo (z=2)~~
determina il vertice k tale che:

$$t_{hk} + t_{kh} = \min\{t_{hi} + t_{ih} : i \in V \setminus \{h\}\}$$

• se $t_{hk} + t_{kh} \le d$ esiste una soluzione
ammissibile costituita dal
circuito $(h, k), (k, h)$; $(z \geq 2)$

$O(n)$ • se $t_{hk} + t_{kh} > d$ non esistono soluzioni ammissibili